Diskretisasi dan Analisis Dinamika Model Lotka-Volterra dengan Metode Numerik

Muhammad Naufal Romi Annafi - 13524058
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jalan Ganesha 10 Bandung
E-mail: naufalxromi@gmail.com , 13524058@std.stei.itb.ac.id

***Abstract*— Penelitian ini membahas diskretisasi model Lotka–Volterra menggunakan metode Euler dan Heun. Analisis difokuskan pada tipe rekurens, kompleksitas algoritma, kestabilan orbit, dan jarak terhadap titik tetap. Hasil menunjukkan bahwa metode Heun lebih stabil dalam mempertahankan perilaku orbit dibanding metode Euler, meskipun keduanya memiliki kompleksitas komputasi yang serupa. Temuan ini memberi gambaran tentang pengaruh metode numerik terhadap dinamika sistem diskrit.**

Keywords—Lotka-Volterra, metode Euler, metode Heun, Model diskrit.

I. PENDAHULUAN

Model Lotka–Volterra merupakan salah satu model matematika klasik yang digunakan untuk menggambarkan interaksi antara dua spesies dalam ekosistem, khususnya hubungan predator–mangsa. Model ini dinyatakan dalam bentuk sistem persamaan diferensial nonlinier yang bersifat kontinu terhadap waktu. Namun, untuk tujuan simulasi numerik dan implementasi komputasional, sering kali model ini perlu didiskretisasi menjadi bentuk diskrit.

Dalam studi ini, dilakukan diskretisasi model Lotka–Volterra menggunakan dua metode numerik populer, yaitu metode Euler dan metode Heun. Kedua metode ini memiliki karakteristik pendekatan yang berbeda dalam mengestimasi solusi dari sistem dinamik kontinu, yang berimplikasi pada perilaku solusi diskrit yang dihasilkan.

Fokus utama penelitian ini adalah pada analisis hasil diskretisasi tersebut dalam beberapa aspek penting, yaitu: (1) karakteristik tipe rekurens dari model diskrit, (2) kompleksitas algoritma dari tiap metode numerik, (3) kestabilan orbit dinamik yang terbentuk, serta (4) jarak solusi terhadap titik tetap dari sistem. Analisis dilakukan secara teoritis maupun melalui simulasi numerik untuk mengevaluasi bagaimana masing-masing metode mempertahankan sifat dinamis dari sistem asli.

Dengan pendekatan ini, diharapkan diperoleh pemahaman yang lebih mendalam mengenai kelebihan dan keterbatasan masing-masing metode numerik dalam merepresentasikan dinamika sistem ekologi dua spesies secara diskrit.

II. LANDASAN TEORI

A. Rekursi

Rekursi adalah metode untuk mendefinisikan suatu objek dalam terminologi dirinya sendiri. Aplikasi rekursi banyak digunakan dalam matematika atau ilmu komputer yaitu fungsi rekursif. Definisi fungsi rekursif terdiri dari dua bagian, yaitu basis dan rekurens. Basis merupakan nilai yang terdefinisi secara eksplisit dan dijadikan sebagai dasar dari fungsi, misal *f(0)*. Sedangkan, rekurens merupakan suatu fungsi yang memiliki nilai untuk suatu input dalam bentuk fungsi yang sama, tetapi dengan input lebih kecil.

Contoh fungsi rekursif yang populer adalah fungsi Fibonacci yang dinyatakan sebagai berikut:

Basis 1: $f(0) = 0$

Basis 2: $f(1) = 1$

Rekurens: $f(n) = f(n-1) + f(n-2),\ n > 1$

Contoh algoritma fungsi faktorial:

```
function Factorial (input n: integer) -> integer
DEKLARASI
  -
ALGORITMA
  if n = 0 then
    return 1                    {Basis}
  else
    return n*Faktorial(n-1)     {Rekurens}
```

Relasi rekurens adalah persamaan yang mendefinisikan suatu suku dalam suatu barisan berdasarkan suku-suku sebelumnya. Dalam kata lain, relasi ini menggambarkan hubungan antara suku-suku dalam barisan dengan nilai suku saat ini bergantung pada nilai suku-suku sebelumnya. Persamaan dinyatakan sebagai a_n, dan suku-suku sebelumnya dinyatakan sebagai $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0$.

Contoh persamaan:

$a_n = 3a_{n-1} + 2$,

$a_n = 10a_{n-2} - 3a_{n-1}$,

$2a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Relasi rekurens dapat dibagi berdasarkan beberapa kategori, yaitu berdasarkan homogenitas, linearitas, dan jumlah orde.

1. Homogenitas

   Relasi rekurens dikatakan homogen jika tidak memiliki suku bebas (konstanta atau fungsi luar). Sebaliknya, relasi rekurens dikatakan nonhomogen jika memiliki suku bebas

   Contoh:

   $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$ (homogen)

   $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} + 2^n$ (nonhomogen)

   Persamaan kedua mengandung 2^n yang merupakan suku bebas

2. Linearitas

   Relasi rekurens dikatakan linear jika setiap suku sebelumnya memiliki pangkat satu dan tidak ada perkalian antar suku. Jika ada satu atau lebih suku sebelumnya memiliki pangkat lebih dari satu atau terdapat perkalian antar suku, relasi rekurens dikatakan nonlinear

   Contoh:

   $a_n = 5a_{n-1} - 3a_{n-2}$ (linear)

   $a_n = a_{n-1}^2 + 1$ (nonlinear)

   Persamaan kedua memiliki suku yang memiliki pangkat lebih dari satu (a_{n-1}^2)

3. Jumlah Orde

   Orde suatu relasi rekurens merupakan jumlah maksimum perbedaan indeks antara suku terbesar dengan suku sebelumnya.

   Contoh:

   $a_n = a_{n-1} + 3$ (orde satu)

   $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2}$ (orde dua)

B. Kompleksitas Algoritma

Kompleksitas algoritma merupakan ukuran untuk menilai efisiensi suatu algoritma dalam menyelesaikan masalah. Kompleksitas algoritma dinyatakan dalam dua bentuk utama, yaitu: kompleksitas waktu T(n) yang dari tahapan komputasi yang dilakukan oleh program berdasarkan masukan suatu nilai, misal n dan kompleksitas ruang S(n) yang diukur dari memori yang digunakan oleh struktur data dalam program berdasarkan masukan suatu nilai, misal n.

Secara khusus, kompleksitas waktu dihitung berdasarkan banyaknya operasi dalam program, misal operasi aritmatika, baca/tulis, perbandingan, pengaksesan elemen. Jenis-jenis kompleksitas waktu dalam algoritma meliputi: logaritmik, linear, kuadratik, faktorial, dan lain-lain.

Langkah-langkah dalam mencari kompleksitas waktu dalam program:
1. Identifikasi operasi dasar
2. Amati struktur khusus seperti perulangan atau rekursif
3. Kombinasikan jumlah operasi dasar dalam blok program dengan struktur khusus

Sedangkan, Big-O (O-notasi) adalah cara untuk menyatakan notasi kompleksitas waktu asimtotik. Big-O didefinisikan dengan T(n) adalah O(f(n)), yang artinya T(n) berorde paling besar f(n) jika terdapat konstanta C dan n0 sehingga T(n) <= Cf(n) untuk n >= n0

C. Persamaan Lotka-Volterra

Persamaan Lotka-Volterra adalah model matematika klasik yang menggambarkan interaksi antara dua spesies berbeda, yaitu predator dan mangsa. Model ini dibuat secara independen oleh Alfred J. Lotka pada tahun 1925 dan Vito Volterra pada tahun 1926. Model ini bertujuan untuk menggambarkan bagaimana populasi predator dan mangsa saling memengaruhi dalam jangka waktu tertentu. Model ini berbentuk persamaan diferensial nonlinear orde satu sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$

$$\frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y$$

dengan,

- x: kepadatan populasi dari mangsa
- y: kepadatan populasi dari predator
- α: tingkat kelahiran alami mangsa
- β: tingkat keberhasilan predator memangsa mangsa
- δ: efisiensi predator mengubah makanan menjadi pertumbuhan
- γ: tingkat kematian alami predator

Model Lotka-Volterra merupakan model predator-mangsa dalam kondisi ideal. Model ini menggunakan sejumlah asumsi tentang lingkungan dan biologi populasi pemangsa:

1. Mangsa mendapat makanan yang cukup setiap saat
2. Pasokan makanan untuk pemangsa bergantung sepenuhnya pada ukuran populasi pemangsa
3. Laju perubahan populasi sebanding dengan besarnya

4. Selama proses, lingkungan tidak berubah dan adaptasi genetik tidak penting
5. Predator memiliki nafsu makan yang tidak terbatas
6. Kedua populasi dapat dijelaskan dengan satu variabel atau mengasumsikan populasi tidak memiliki distribusi yang berkontribusi terhadap dinamika.

D. Metode Numerik

Metode numerik adalah metode penyelesaian suatu persamaan diferensial yang tidak memiliki solusi eksak atau sulit diselesaikan dengan metode analitik tradisional seperti kalkulis. Dalam banyak kasus di bidang sains dan rekayasa, beberapa permasalahan menghasilkan persamaan diferensial yang rumit dan tidak dapat diselesaikan secara simbolik.

Metode numerik mentransformasi persamaan diferensial menjadi serangkaian perhitungan matematis yang melibatkan aritmatika, seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian yang dapat dipecahkan menggunakan komputer. Dengan pendekatan ini solusi tidak dinyatakan sebagai fungsi eksak, tetapi sebagai nilai-nilai numerik pada titik-titik diskrit tertentu.

Transformasi dari bentuk kontinu ke bentuk diskrit dilakukan melalui metode-metode tertentu, seperti metode Euler, metode Runge-Kutta, dan deret Taylor. Pemilihan metode tergantung pada sifat persamaan yang ingin diselesaikan dan tingkat ketelitian yang diinginkan. Setiap metode memiliki kelebihan dan keterbatasan.

Dalam makalah ini, dibahas dua metode numerik yang populer digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial, yaitu metode Euler dan metode Heun.

- Metode Euler
  Metode Euler adalah salah satu teknik numerik yang digunakan untuk mencari solusi perkiraan dari persamaan diferensial. Metode ini merupakan metode numerik yang paling sederhana sehingga akurasinya terbatas. Metode ini bekerja dengan cara memperbarui nilai secara iteratif berdasarkan turnan fungsi pada titik sebelumnya.
  Langkah-langkah dari metode Euler secara umum:
  1. Tentukan titik awal integrasi x_0 dan y_0
  2. Tentukan jumlah iterasi n dan step size h yang digunakan
  3. Lakukan integrasi menggunakan persamaan
  $$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$
- Metode Heun
  Sama seperti metode Euler, metode ini adalah salah satu teknik numerik penyelesaian persamaan diferensial. Secara sederhana. Metode Heun adalah perbaikan metode Euler yang merupakan metode numerik dasar untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Metode Heun menggunakan pendekatan prediktor-korektor, yaitu nilai awal diprediksi terlebih dahulu , kemudian dikoreksi untuk mendapatkan hasil yang lebih akurat.
  Langkah-langkah dari metode Heun secara umum:
  1. Tentukan titik awal integrasi x_0 dan y_0
  2. Tentukan jumlah iterasi n dan *step size* h yang akan digunakan
  3. Lakukan prediksi nilai awal dengan persamaan:
  $$y_{i+1}^0 = y_i + f(x_i, y_i)h$$
  4. Lakukan koreksi nilai awal dengan persamaan:
  $$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{f(x_i, y_i) + f(x_i, y_{i+1}^0)}{2}\right)h$$

III. PERSIAPAN

A. Model Diskrit dengan Metode Numerik

Persamaan Lotka-Volterra klasik merupakan model matematika yang berbentuk kontinu. Model kontinu merupakan model yang penyelesaian perlu dilakukan teknik analitik, seperti kalkulus sehingga kurang cocok untuk digunakan untuk perhitungan komputer.

Model Lotka-Volterra klasik terdiri dari dua persamaan diferensial:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$
$$\frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y$$

Dengan metode euler, langkah pengerjaan dapat langsung ke pengintegrasian variabel dalam persamaan diferensial ke persamaan metode Euler. Hal ini karena dalam percobaan, nilai x_n dan y_n sudah diketahui sejak awal. Definisikan fungsi sebagai berikut:

$$f(x, y) = \alpha x - \beta xy$$
$$g(x, y) = \delta xy - \gamma y$$

Integrasikan persamaan dalam metode Euler

$$x_{n+1} = x_n + (\alpha x_n - \beta x_n y_n)h$$
$$y_{n+1} = y_n + (\delta x_n y_n - \gamma y_n)h$$

Sedangkan, untuk metode Heun, metode ini sederhananya adalah perbaikan dari metode Euler. Dengan menggunakan solusi dari metode Euler sebelumnya, langkah pengerjaan metode langsung ke proses koreksi, yaitu:

$$x_{n+1}^{(1)} = x_n + \left(\frac{f(x_n, y_n) + f\left(x_{n+1}^{(0)}, y_{n+1}^{(0)}\right)}{2}\right)h$$
$$y_{n+1}^{(1)} = y_n + \left(\frac{g(x_n, y_n) + g\left(x_{n+1}^{(0)}, y_{n+1}^{(0)}\right)}{2}\right)h$$

B. Algoritma dari metode numerik

Metode Euler sebagai metode yang sangat sederhana, pembuatan algoritma juga sangat sederhana

```
def euler(x, y, h, n, a, b, c, d):
```

```
    results = []
    for _ in range(n):
        results.append((x, y))
        f = a * x - b * x * y
        g = d * x * y - c * y
        x += h * f
        y += h * g
    return results
```

Fungsi euler di atas mengambil parameter nilai awal x dan y, step size h, jumlah iterasi n, serta parameter konstanta a, b, c, d yang digunakan dalam model Lotka-Volterra. Di dalam fungsi, list results digunakan untuk menyimpan pasangan nilai (x,y) di setiap langkah waktu.

Pada setiap iterasi, Dilakukan metode Euler dengan terlebih dahulu mendefinisikan variabel f dan g digunakan sebagai fungsi dalam persamaan umum metode Euler. Nilai x dan y diperbarui setiap perubahan fungsi dengan menambahkan hasil perkalian h dengan f atau g sebagai perubahan nilai fungsi. Iterasi ini dilakukan sebanyak n kali dan fungsi mengembalikan daftat nilai simulasi sebagai representasi dari perubahan titik dalam grafik terhadap waktu dalam bentuk pasangan nilai (x,y).

Untuk metode Heun, algoritmanya seperti ini

```
def heun(x, y, h, n, a, b, c, d):

    results = []

    f = lambda x, y: a * x - b * x * y

    g = lambda x, y: d * x * y - c * y

    for _ in range(n):

        results.append((x, y))

        x1 = x + h * f(x, y)

        y1 = y + h * g(x, y)

        x += h * (f(x, y) + f(x1, y1)) / 2

        y += h * (g(x, y) + g(x1, y1)) / 2

    return results
```

Fungsi heun di atas menerima parameter yang sama dengan fungsi euler sebelumnya, yaitu nilai awal x dan y, step size h, jumlah iterasi n, serta parameter konstanta a, b, c, d yang digunakan dalam model Lotka-Volterra. Di dalam fungsi, digunakan juga list results untuk menyimpan pasangan nilai (x,y) di setiap langkah waktu.

Pada awal program, didefinisikan dua fungsi f dan g menggunakan lambda karena terdapat dua pasangan variabel berbeda yang menggunakan fungsi, tidak seperti pada fungsi euler sebelumnya. Dalam setiap iterasi, nilai x dan y disimpan terlebih dahulu ke list. Selanjutnya, dilakukan proses prediksi menggunakan metode Euler. Kemudian, nilai x dan y diperbarui dengan mencari rata-rata antara nilai yang dihasilkan prediksi dan koreksi.

Proses diiterasikan sebanyak n langkah lalu hasil akhirnya berupa titik-titik dari grafik yang merepresentasikan solusi dari persamaan diferensial Lotka-Volterra.

IV. Analisis

A. Tipe fungsi rekurens

Model Lotka-Volterra versi metode Euler

$$x_{n+1} = x_n + (\alpha x_n - \beta x_n y_n)h$$

$$y_{n+1} = y_n + (\delta x_n y_n - \gamma y_n)h$$

Model ini menghasilkan fungsi rekurens yang linear secara struktur dasar, namun fungsi di dalamnya $\alpha x - \beta y$ dan $\delta xy - \gamma y$ yang mengandung perkalian antar dua variabel menyebabkan fungsi rekurens menjadi nonlinear. Fungsi merupakan fungsi rekurens orde satu karena nilai x_{n+1} dan y_{n+1} dapat dihitung langsung dengan nilai x_n dan y_n. Dengan demikian, fungsi rekurens dalam model ini adalah nonlinear orde satu.

Model Lotka-Volterra versi metode Heun

$$x_{n+1}^{(1)} = x_n + \left(\frac{f(x_n, y_n) + f\left(x_{n+1}^{(0)}, y_{n+1}^{(0)}\right)}{2}\right)h$$

$$y_{n+1}^{(1)} = y_n + \left(\frac{g(x_n, y_n) + g\left(x_{n+1}^{(0)}, y_{n+1}^{(0)}\right)}{2}\right)h$$

Model ini juga membentuk fungsi yang linear secara struktur dasar, namun fungsi di dalamnya yang lebih kompleks daripada metode Euler menyebabkan fungsi rekurens menjadi nonlinear karena perkalian beberapa variabel. Sedangkan, untuk orde dari model ini adalah orde dua karena fungsi rekurens memerlukan dua nilai, yaitu x_n dan $x_{n+1}^{(0)}$ untuk menghitung nilai dari $x_{n+1}^{(1)}$.

B. Kompleksitas Algoritma

Kompleksitas waktu algoritma dari model Lotka-Volterra dari metode Euler: Kondisi berhenti program adalah ketika nilai step sama dengan nilai n. Dalam setiap iterasi, terjadi satu kali pemrosesan blok program sehingga total pemrosesan program ada sebanyak n kali. Dalam satu kali pemrosesan blok program, terdapat 13 kali operasi aritmatika sehingga kompleksitas waktu program adalah T(n) = 13n dan O(n)

Sedangkan, kompleksitas waktu algoritma dati model Lotka-Volterra dari metode Heun: Kondisi berhenti program sama seperti metode Euler yaitu ketika nilai step sama dengan nilai n dan nilai step pada awalnya nol. Dalam setiap iterasi, terjadi satu kali pemrosesan blok program. Namun, dalam satu kali pemrosesan blok program dalam metode Heun terdapat lebih banyak operasi, yaitu sebanyak 31 operasi sehingga kompleksitas waktu algoritma T(n) = 31n dan O(n)

Selanjutnya, dilakukan uji coba kompleksitas waktu pada program sebenarnya menggunakan python pada perangkat yang sama dengan blok program sebagai berikut

```
a, b, c, d = 1.0, 0.1, 1.5, 0.075
x0, y0 = 40, 9
h = 0.01
uji = 10
iterasi = [100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000]
print("Uji coba waktu eksekusi:")
print(f"{'Iterasi':>7} | {'Euler (s)':>10} | {'Heun (s)':>10}")
print("-" * 33)
for n in iterasi:
    startEuler = time.time()
    euler(x0, y0, h, n, a, b, c, d)
    endEuler = time.time()

    startHeun = time.time()
    heun(x0, y0, h, n, a, b, c, d)
    endHeun = time.time()

    print(f"{n:>7} | {endEuler - startEuler:>10.6f} | {endHeun - startHeun:>10.6f}")
```

Hasil dari program didapatkan sebagai berikut

```
Uji coba waktu eksekusi:
Iterasi |  Euler (s) |   Heun (s)
---------------------------------
    100 |   0.000031 |   0.000047
    200 |   0.000030 |   0.000083
    300 |   0.000067 |   0.000117
    400 |   0.000073 |   0.000153
    500 |   0.000066 |   0.000208
    600 |   0.000077 |   0.000228
    700 |   0.000123 |   0.000277
    800 |   0.000113 |   0.000305
    900 |   0.000119 |   0.000670
   1000 |   0.000415 |   0.000683
```

Dapat dilihat, waktu penyelesaian algoritma dari metode Euler lebih cepat daripada algoritma dari metode Heun pada semua hasil uji coba.

C. Diagram Fase

Diagram fase adalah plot dari y(t) terhadap x(t). Dalam konteks persamaan Lotka-Volterra, idealnya diagram fase menghasilkan orbit tertutup karena berlaku siklus:

1. mangsa naik -> predator naik
2. predator naik -> mangsa turun
3. mangsa turun -> predator turun
4. predator turun -> mangsa naik

Untuk menganalisis kestabilan orbit dari model diperlukan titik tetap dari persamaan dari model. Titik tetap merepresentasikan kondisi ketika populasi mangsa dan predator tidak berubah dari waktu ke waktu atau dengan kata lain merupakan solusi dari sistem dengan keadaan stasioner. Titik tetap ini menjadi dasar analisis mengenai kestabilan lokal dan perilaku orbit sistem melalui pendekatan numerik diskrit.

Untuk menentukan titik tetap, asumsikan bahwa $x_{n+1} = x_n = x*$ dan $y_{n+1} = y_n = y*$. Substitusikan persamaan tersebut ke dalam sistem, lalu diperoleh:

$$x* = x* + h(\alpha x* - \beta x* y*)$$

$$y* = y* + h(\delta x* y - \gamma y*)$$

Sederhanakan kedua persamaan:

$$h(\alpha x* - \beta x* y*) = 0$$

$$h(\delta\, x* y* - \gamma y*) = 0$$

Karena $h\ \neq 0$, maka sistem menjadi:

$$\alpha x* \ - \beta x* y* = \ 0$$

$$\delta x* y* \ - \gamma y* = \ 0$$

Faktorkan $x*$ dan $y*$:

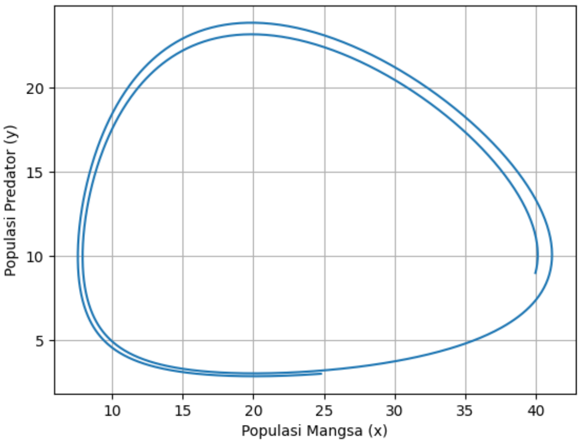
$$x*(\alpha - \beta y*) = 0$$

$$y*(\delta x* - \gamma) = 0$$

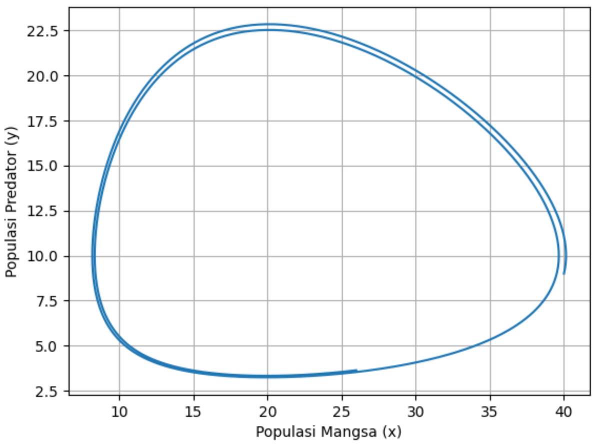
Diperoleh dua kemungkinan titik tetap:

1. Titik trivial: $(x*, y*) = (0,0)$
2. Titik nontrivial:
   Jika $x* \neq 0$ dan $y* \neq 0$:
   $$\alpha - \beta y* = 0 \rightarrow y* = \frac{\alpha}{\beta}$$
   $$\delta x* - \gamma = 0 \rightarrow x* = \frac{\gamma}{\delta}$$
   sehingga titik tetap nontrivial adalah:
   $$(x*, y*) = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$$

Dengan menggunakan data fiktif, yaitu $\alpha = 1.0, \beta = 0.1, \gamma = 1.5, \delta = 0.075, n = 1000, h = 0.01, x_0 = 18, y_0 = 15$. Dilakukan simulasi visualisasi dari diagram fase dengan kode python



Hasilnya diagram fase model Lotka-Volterra dari metode Euler menunjukkan lintasan yang menyimpang dari orbit. Pada setiap siklus, lintasan orbit makin lama, makin menjauh dari titik tetap. Jika dilakukan iterasi dengan jumlah yang lebih besar hal ini dapat menyebabkan sistem mati.

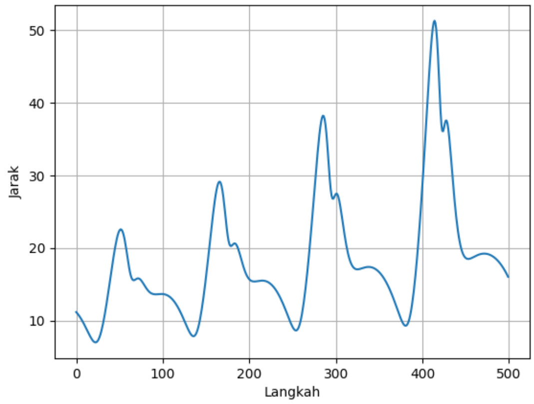


Sedangkan, diagram fase model Lotka-Volterra dari metode Heun menunjukkan lintasan fase yang sedikit menyimpang, namun memiliki bentuk orbit yang lebih stabil dibandingkan metode euler dengan jumlah iterasi dan besar step yang sama.

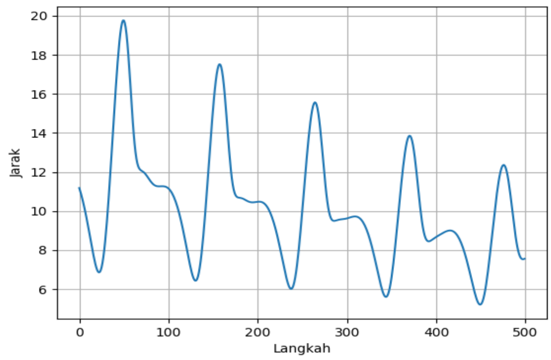
Selain visualisasi diagram fase, dilakukan juga visualisasi nilai jarak dari titik ke titik tetap. Sama seperti diagram fase, jika grafik jarak menunjukkan kestabilan periodik tanpa kecenderungan menyusut (konvergen) atau mengembang (divergen), persamaan dikatakan dapat menghasilkan suatu model yang stabil. Perhitungan jarak menggunakan rumus pythagoras

$$D^2 = \sqrt{(x * -x)^2 + (y * -y)^2}$$

Visualisasi dilakukan menggunakan kode python



Hasilnya grafik jarak ke titik tetap dari metode Euler menunjukkan pola osilasi dengan amplitudo yang makin besar. Amplitudo jarak meningkat drastis hingga lebih dari 50 pada beberapa titik. Pertumbuhan amplitudo menunjukkan adanya akumulasi error setiap iterasi akibat pendekatan satu langkah Euler yang sensitif terhadap error lokal. Hal ini mengindikasikan model diskrit yang dihasilkan metode Euler cenderung tidak mampu mempertahankan kestabilan orbit terhadap titik tetap sehingga rentan menghasilkan solusi yang kurang realistis



Sedangkan, pada visualisasi jarak terhadap titik tetap dari metode Heun menunjukkan jarak ke titik tetap berosilasi dalam rentang yang lebih terbatas, yaitu antara 5-20. Osilasi juga menunjukkan perilaku yang lebih stabil, meskipun grafik menunjukkan perilaku yang tetap tidak stabil. Metode Heun walaupun menunjukkan kestabilan numerik yang tidak terlalu stabil, namun memberikan kestabilan yang lebih baik untuk model Lotka-Volterra dibandingkan metode Euler

V. KESIMPULAN

Penelitian ini membandingkan diskretisasi model Lotka–Volterra menggunakan metode Euler dan Heun berdasarkan tipe rekurens, kompleksitas algoritma, kestabilan orbit, dan jarak terhadap titik tetap. Dari analisis tipe rekurens, kedua model diskrit memiliki karakter nonlinear, namun berbeda dalam orde: metode Euler menghasilkan rekurens nonlinear orde satu, sedangkan metode Heun menghasilkan rekurens nonlinear orde dua.

Secara komputasi, metode Euler memiliki kompleksitas waktu lebih rendah dibandingkan metode Heun. Namun, hasil simulasi menunjukkan bahwa metode Euler cenderung tidak stabil, ditandai dengan orbit yang menyimpang dan jarak terhadap titik tetap yang terus bertambah. Sebaliknya, metode Heun menghasilkan orbit yang lebih mendekati bentuk siklus tertutup dan jarak terhadap titik tetap yang lebih terkendali, meskipun tidak sepenuhnya stabil.

Secara keseluruhan, metode Heun lebih unggul dalam menjaga kestabilan numerik dan mempertahankan karakter dinamik sistem Lotka–Volterra, meski dengan biaya komputasi yang lebih tinggi. Pemilihan metode numerik sebaiknya mempertimbangkan kebutuhan akurasi orbit dan sensitivitas terhadap kestabilan jangka panjang.

References

[1] R. Munir, ‘Homepage Rinaldi Munir’. https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/. [Diakses 18 Juni 2025]

[2] K. H. Rosen, *Discrete mathematics and its applications*. New York, Ny Mcgraw-Hill Education, 2019. [Diakses 18 Juni 2025]

[3] V. A. Bloomfield, Using R for Numerical Analysis in Science and Engineering. CRC Press, 2018. [Diakses 19 Juni 2025]

[4] S. I. Salwa, L. A. Shakira and D. Savitri, "DINAMIKA MODEL MANGSA-PEMANGSA LOTKA VOLTERRA DENGAN ADANYA KERJA SAMA BERBURU PADA PEMANGSA," Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika (JRAM), vol. 7, no. 2, pp. 195-205, 2023. [Diakses 18 Juni 2025]

[5] J. Chasnov, “1.4: The Lotka-Volterra Predator-Prey Model,” *Mathematics LibreTexts*, Jan. 05, 2022. https://math.libretexts.org/Bookshelves/Applied_Mathematics/Mathematical_Biology_(Chasnov)/01%3A_Population_Dynamics/1.04%3A_The_Lotka-Volterra_Predator-Prey_Model [Diakses 20 Juni 2025]

[6] R. Monica, L. Deswita and R. Pane, "KESTABILAN POPULASI MODEL LOTKA-VOLTERRA TIGA SPESIES DENGAN TITIK KESETIMBANGAN," JOM FMIPA, vol. 1, no. 2, pp. 133-141, 2014. [Diakses 20 Juni 2025]

VI. Ucapan Terima Kasih

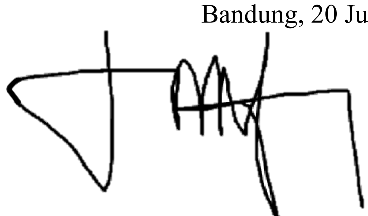
Penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Tuhan Yang Maha Esa,
2. Orang tua penulis,
3. Bapak dan Ibu dosen pengampu mata kuliah Matematika Diskrit IF1220,
4. Teman-teman penulis, dan
5. Pihak-pihak lain yang telah mendukung penulis selama pembelajaran dan proses pengerjaan makalah ini.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 20 Juni 2025



Muhammad Naufal Romi Annafi, 13524